

Proč vlastně sjednocování silových interakcí vyžaduje více dimenzí? Uvažujme nejjednodušší aplikaci Kaluzovy-Kleinovy teorie pro elektrický náboj.

Každému elektronu přísluší **vlastní moment hybnosti částice, který se nazývá spin**. Nejjednodušší znázornění spinu je založeno na představě, že částice je podobná kuličce a její spin je způsoben rotací kuličky kolem vlastní osy.

Důsledné uplatnění zmíněné představy ovšem vede k vážným rozporům. Elektron má například svůj magnetický moment, který lze vysvětlit rotací nabitého předmětu kolem osy. Ale rotace elektronu by musela být tak vysoká, že rychlost bodů na jeho "rovníku" by značně přesáhla rychlost světla. Také není jasné, proč rotaci nelze zastavit. Velikost spinu částice je její trvalou charakteristikou.

Takovou veličinu v nerelativistické fyzice neznáme. Tam je moment hybnosti spjat s otáčivým pohybem tělesa kolem nějaké osy. Jestliže ustane pohyb nebo jestliže je hmotnost tělesa nulová, je nulový také moment hybnosti. (**spin nebude momentem hybnosti s použitím „hmotnosti“, ale „rotace vlny“?**) Spin přísluší částici i v klidu, i částici s nulovou klidovou hmotností. K jeho určení není třeba zadat osu otáčení. Spin je v tomto smyslu veličinou, která se projevuje svým zákonem zachování a schopností přeměny v jiné známé druhy momentu hybnosti. Úhrnný moment hybnosti zůstává zachován.

Každá částice má svou stálou hodnotu spinu, kterou nikdy nemění. Spin může nabývat jen zcela určitých dovolených hodnot, které se řídí jednoduchým pravidlem. Spin podstatně určuje chování částice ve skupině stejných částic a jeho hodnota má vliv na počet stavů, v nichž se částice může nacházet.

Spin elektronu může nabývat jen dvou hodnot, protože elektron může pro danou myšlenou osu rotovat pouze dvěma směry. Obě hodnoty mají stejnou absolutní velikost. Fyzikové tyto dvě hodnoty spinu označují jako "horní" a "dolní".

Klíčovou vlastností spinu elektronu je, že nelze určit osu rotace. Stejně jako elektron se může vyskytovat na různých místech v prostoru, může mít libovolnou osu rotace. Nezávisle na tom, která osa rotace se použije, elektron má spin stále stejné hodnoty (tedy vždy jen buď "horní" nebo jen "dolní"). Měření tedy určuje osu rotace a před tímto měřením nelze tuto osu rotace určit.

Pokud atomový nebo jaderný systém rotuje, jeho úhlový moment má hodnotu, která je celým násobkem hodnoty spinu elektronu. Spin libovolné částice nebo systému částic je tedy kvantován.

Další kvantovou veličinou elektronu je elektrický náboj. Všechny částice mají buď kladný nebo záporný elektrický náboj, jehož velikost je rovna náboji elektronu. Náboj a spin částice jsou tedy kvantovány. Lze se proto ptát, zda mezi nimi existuje nějaký vztah.

Ve 40. letech 20. století teoretičtí fyzikové použili aparát matematiky kvantové teorie na popis geometrických rotací spinu v normálním trojrozměrném prostoru a pro popis chování náboje pomocí veličiny nazvané isospin. Isospin není trojrozměrným vektorem, ale vektorem ve vícerozměrném prostoru, jehož jedna dimenze se promítá do našeho prostoru. Šlo o užitečný teoretický koncept, který byl schopen vysvětlit, jak se neutrony v jádře atomu mohou měnit na protony a naopak, nebo jak souvisí elektrony a neutrina.

..-.-.-

Podle velikosti spinu dělíme všechny elementární částice do dvou skupin:

- částice, které se neotáčejí nebo otáčejí rychle, mají nulový nebo celistvý spin: bosony
- částice, která se otáčejí středně rychle, mají poloviční spin: fermiony

Mechanická analogie mezi spinem a "rotací" elektronu kolem své osy je sice asi jediný způsob, jak si spin názorně představit, ale jinak je stejně nepřesná, jako když si orbitální pohyb elektronu představujeme jako "obíhání" bodové částice okolo jádra. Tak například u rotující klasické koule, v níž je hustota náboje úměrná hustotě hmotnosti (a jejich poměr je e/m_e), je poměr magnetického momentu k momentu hybnosti vždy $e/2m_e$, zatímco poměr mezi spinovým magnetickým momentem a spinovým momentem hybnosti je dvakrát větší, $\mu_B : \frac{1}{2}\hbar = e/m_e$. V jedné důležité věci se ale spin vymyká i elementárním kvantovým představám. Moment hybnosti musí být vždy celé číslo: jestliže atom obejdeme jednou dokola a vrátíme se na stejné místo, musíme dospět ke stejné hodnotě vlnové funkce. To si můžeme představovat i jinak: místo abychom obcházeli stojící atom, můžeme stát my a "otáčet" atom i s jeho vlnovou funkcí. Má-li atom moment hybnosti $M_z = 3\hbar$ (tedy $l_z = 3$), potom se k původní hodnotě dostaneme při otočení o $360^\circ / 3 = 120^\circ$; má-li $l_z = 2$, pak při otočení o $360^\circ / 2 = 180^\circ$; má-li $l_z = 1$, pak při otočení o $360^\circ / 1 = 360^\circ$. Kdyby měl $l_z = \frac{1}{2}$, pak by pro návrat ke stejné hodnotě vlnové funkce bylo potřeba atom otočit o $360^\circ / 0,5 = 720^\circ$, tedy dvakrát dokola, a při otočení jednou dokola (o 360°) by vlnová funkce změnila znaménko. A právě to se děje u elektronu: protože jeho moment hybnosti (ve vztažné soustavě, v níž se nepohybuje) je $\frac{1}{2}\hbar$, shledáme, že jeho vlnová funkce změnila znaménko, když ho obejdeme jednou dokola, a až když ho obejdeme dvakrát, nalezneme původní hodnotu vlnové funkce. To ukazuje, že vlnovou funkci si nemůžeme představovat jako např. teplotní pole, které má v určitém místě vždy určitou hodnotu (teplotu v tomto místě) bez ohledu na to, kolikrát jsme co "obešli dokola".

I když musíme přiznat, že tomu "co je spin" vlastně moc dobře nerozumíme, počítat se spinem umíme velice dobře.

Elektronu místo jedné vlnové funkce přiřazujeme funkce dvě: jedna popisuje tu "část" elektronu, která má spin $+\frac{1}{2}\hbar$ (orientovaný v kladném směru osy z, "nahoru"), a druhá, tu, která má spin $-\frac{1}{2}\hbar$ ("dolů").

Jako u orbitálního momentu hybnosti i zde vynecháváme Planckovu konstantu a mluvíme prostě o spinu $s_z = +\frac{1}{2}$ nebo $s_z = -\frac{1}{2}$. Maximální hodnotu s_z , tedy $\frac{1}{2}$, označujeme písmenem s ; velikost vektoru spinu je opět $\sqrt{s(s+1)}\hbar = \sqrt{\frac{3}{4}}\hbar$. Dvě funkce, které dohromady popisují stav elektronu, označujeme $\psi(x, +\frac{1}{2})$ a $\psi(x, -\frac{1}{2})$ nebo dohromady symbolicky $\psi(x, s_z)$. Jejich

pravděpodobnostní interpretace je taková: $|\psi(x, +\frac{1}{2})|^2$ je úměrná pravděpodobnosti toho, že v místě x najdeme elektron se spinem $s_z = +\frac{1}{2}$, a $|\psi(x, -\frac{1}{2})|^2$ pravděpodobnosti, že tam najdeme elektron se spinem $s_z = -\frac{1}{2}$. Není-li elektron v magnetickém poli, je Schrödingerova rce pro obě vlnové funkce stejná, avšak v magnetickém poli má elektron se spinem "nahoru" jinou energii než elektron se spinem "dolů" (osu z a směr "nahoru" teď volíme podél magnetického pole), a protože Schrödingerova rovnice je odvozena z výrazu pro energii, mění se každá ze složek $\psi(x, +\frac{1}{2})$ a $\psi(x, -\frac{1}{2})$ vlnové funkce a časem jinak, podle jiné rovnice.

Intenzita el. pole v určitém místě má tři složky, tvoří vektor. Vlnová funkce elektronu v určitém místě má dvě složky $\psi(x, +\frac{1}{2})$ a $\psi(x, -\frac{1}{2})$. Taková dvojice se nazývá spinor, a protože vlnová funkce elektronu se místo od místa mění, tvoří spinorové pole.

[?, 259]

změna spinu elektronu

[?, 79,77]

Změní-li elektron ve vodíkovém atomu svůj spin v opačný, vyšle rádiový foton, odpovídající záření 210 mm.



při každé změně rychlosti nabitě částice vzniká foton

Foton má někdy charakter jako částice [?, 74]. Charakter jako částice, tím se rozumí, že za jeden kmit urazí vzdálenost $\frac{c}{\nu}$. Těto vzdálenosti se říká vlnová délka (λ). Chápat fotony jako pole?

"Celých těch padesát let hloubání mě nepřivedlo blíže k odpovědi na otázku, co to jsou světelná kvanta", napsal r. 1951 Einstein svému příteli Bessovi.

Atomy v molekule kmitají vzhledem k těžišti molekuly a v těchto kmítočtech je obsažena eng. vibrační. Molekuly navíc rotují, a mají tedy eng. rotační. Všechny druhy eng. molekul (elektronová, vibrační, rotační) mohou nabývat jen určitých hodnot. Ze stavu vybuzeného o vyšší eng. se molekula vrací do stavu základního a rozdíl eng. vyzáří ve formě fotonů. Eng. vyzářených fotonů je charakteristická pro druh molekuly. [?, 80]

Jaderný spin

Kromě toho, že mluvíme o spinu elementárních částic, označujeme termínem spin i celkovým momentem hybnosti atomového jádra, i když jde vlastně o součet spinu.

2.7.1 Izospin, podivnost, parita

elementární částice tvoří skupinky (multiplety) - viz. tabulka (např. skupina baryony ? má 3 členy, mezony ? má 3 členy, proton a neutron 2 členy, ...). V každé skupince jsou dvě až tři částice o stejném spinu, stejném baryonovém náboji, přibližně stejné hmotnosti, ale s různým elektrickým nábojem.

Izospin (izotopický spin) Počet částic ve skupince je určen tzv. izospinem I , a to podle výrazu $2I + 1$. např.: izospin ? baryonů je $I=1$, takže jejich počet ve skupince je $2*1+1=3$. Pro skupinku nukleonů (proton a neutron) je $I=1/2$, takže jejich počet je $2*1/2+1=2$.

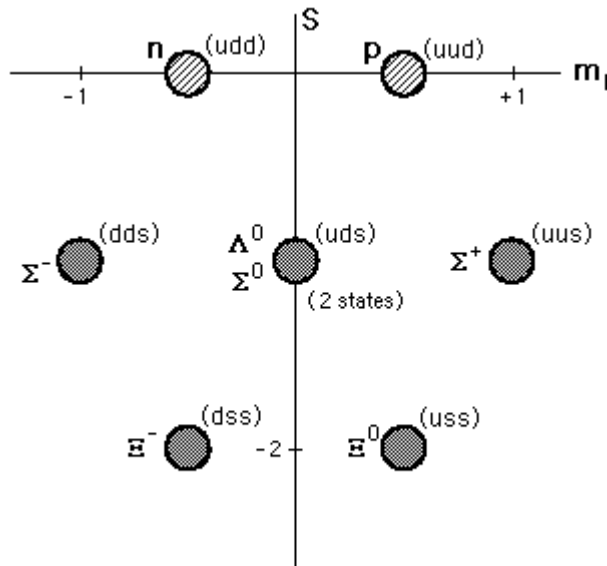
Podivnost Podivnost částice je vlastnost některých baryonů a bosonů. Podivné částice vznikají nesmírně rychle za dobu mnohem kratší než trilióntina sekundy (asi $1e-23$ s) a rozpadají se biliónkrát pomaleji. [?, 33]

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar, \quad s = \frac{1}{2}, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Baryons are combinations of three quarks.

- $j^P = 1/2^+$
- $j^P = 3/2^+$

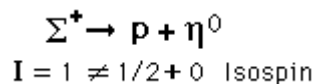


At the quark level, the up and down quarks form an isospin doublet ($I=1/2$) and the projection $+1/2$ is assigned to the up quark and $-1/2$ to the down. The strange quark is in a class by itself and has isospin $I=0$. Isospin is related to other quantum numbers for the particles by

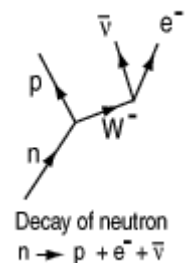
$$\frac{q}{e} = m_I + \frac{S + B}{2}$$

m_I = projection of isospin
 S = strangeness
 B = baryon number

Isospin is associated with a conservation law, as illustrated by the process



A free neutron will decay with a half-life of about 10.3 minutes but it is stable if combined into a nucleus. The decay of the neutron involves the weak interaction as indicated in the Feynman diagram to the right. This fact is important in models of the early universe. The neutron is about 0.2% more massive than a proton, which translates to an energy difference of 1.29 MeV.

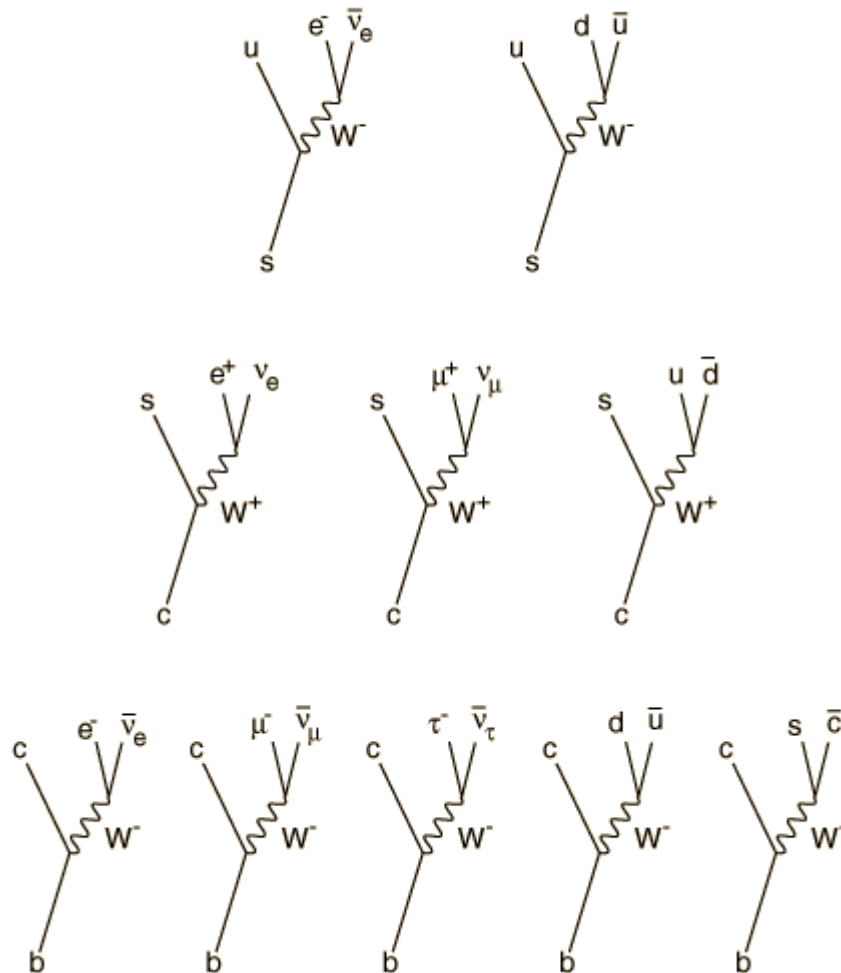


$$t \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow s \rightarrow u \leftrightarrow d$$

Quark	Process	Example	Mean Lifetime (s)
<u>Up</u>	$u \rightarrow d + W^{*+}$	$p + p \rightarrow pn + e^+ + \nu_e$...

Down	$d \rightarrow u + W^{*-}$	$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	900
Strange	$s \rightarrow u + W^{*-}$	$K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$	1.24×10^{-8}
Charm	$c \rightarrow s + W^{*+}$	$D^+ \rightarrow K^- + \pi^0 + \pi^+ + e^+ + \nu_e$	1.1×10^{-12}
Bottom	$b \rightarrow c + W^{*-}$	$B^0 \rightarrow D^{*-} + e^+ + \nu_e$	1.3×10^{-12}
Top	$t \rightarrow b + W^{*+}$

Feynman diagrams of quark decay by weak interaction



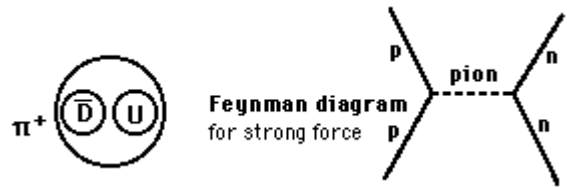
Particle	Symbol	Anti-particle	Makeup	Rest mass MeV/c ²	S	C	B	Lifetime	Decay Modes
Pion	π^+	π^-	$u\bar{d}$	139.6	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+ \nu_\mu$
Pion	π^0	Self	$\frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{\sqrt{2}}$	135.0	0	0	0	0.83×10^{-16}	2γ

The neutral pion decays to an electron, positron, and gamma ray by the electromagnetic interaction on a time scale of about 10^{-16} seconds. The positive and negative pions have longer lifetimes of about 2.6×10^{-8} s.

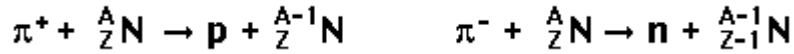
$$\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ + \gamma \quad \text{mass} = 264m_e = 135.0 \text{ MeV}/c^2$$

$$\pi^{+/-} \rightarrow \mu^{+/-} + \nu \quad \text{mass} = 273m_e = 139.6 \text{ MeV}/c^2$$

The pion is a [meson](#). The π^+ is considered to be made up of an up and an anti-down [quark](#). The neutral pion is considered to be a combination $\frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{\sqrt{2}}$



Pions interact with nuclei and transform a neutron to a proton or vice versa:



The pions π^+ and π^- have spin zero and negative intrinsic parity ([Rohlf](#) Sec 17-2).

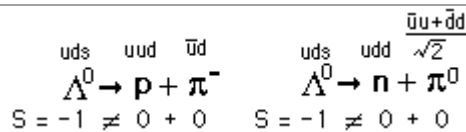
D Meson

The D Meson is the lightest particle which contains a [charm quark](#), and therefore is a good example for the study of decay by [quark transformation](#) by the [weak interaction](#).

Particle	Symbol	Anti-particle	Makeup	Rest mass MeV/c ²	S	C	B	Lifetime	Decay Modes
D	D^+	D^-	$c\bar{d}$	1869.4	0	+1	0	10.6×10^{-13}	$K^+ \pi^-, e^+ \mu^+$
D	D^0	\bar{D}^0	$c\bar{u}$	1864.6	0	+1	0	4.2×10^{-13}	$[K, \mu, e]^+ \pi^-$
D	D_s^+	D_s^-	$c\bar{s}$	1969	+1	+1	0	4.7×10^{-13}	$K^+ \pi^-$

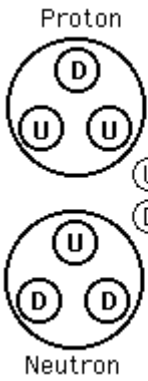
The Lambda Baryon

Particle	Symbol	Makeup	Rest mass MeV/c ²	B	S	Lifetime	Decay Modes
Lambda	Λ^0	uds	1115.6	+1	-1	2.6×10^{-10}	$p\pi^-, n\pi^0$
Lambda	Λ_c^+	udc	2281	+1	0	2×10^{-13}	...



Up and Down Quarks

The up and down quarks are the most common and least massive quarks, being the constituents of [protons](#) and [neutrons](#) and thus of most ordinary matter.



U = "up" quark $+\frac{2}{3}e$
 D = "down" quark $-\frac{1}{3}e$

The fact that the free neutron decays

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

and nuclei decay by [beta decay](#) in processes like

$$P^{32} \rightarrow S^{32} + e^- + \bar{\nu}_e$$

is thought to be the result of a more fundamental [quark process](#)

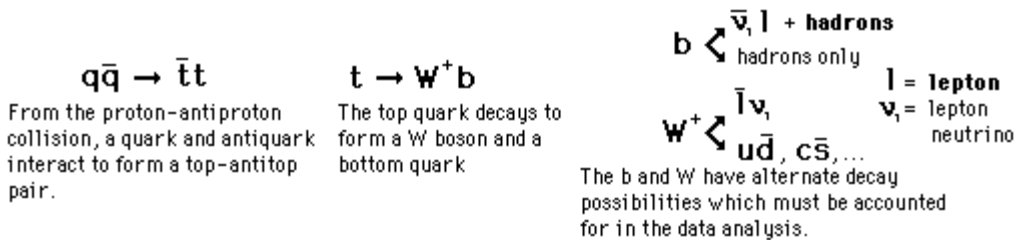
$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{ccc}
 uds & uud & \bar{u}d \\
 \Lambda^0 & \rightarrow p + \pi^- \\
 S = -1 & \neq 0 + 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{ccc}
 \bar{u}u + \bar{d}d \\
 uds & udd & \sqrt{2} \\
 \Lambda^0 & \rightarrow n + \pi^0 \\
 S = -1 & \neq 0 + 0
 \end{array}
 \end{array}$$

S = Strangeness
 B = Baryon number
 Q = Electric charge
 I = Isospin

$$Y = S + B = 2(Q - I)$$

The interaction is envisioned as follows:



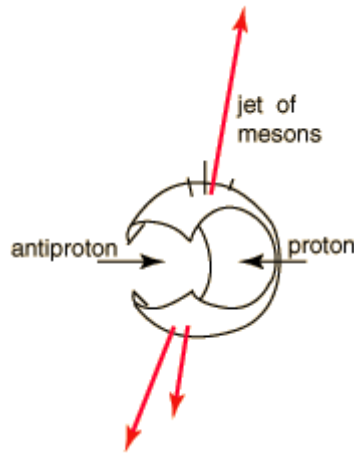
The Bottom Quark

In 1977, an experimental group at [Fermilab](#) led by Leon Lederman discovered a new resonance at 9.4 GeV/c² which was interpreted as a bottom-antibottom quark pair and called the [Upsilon meson](#). From this experiment, the mass of the bottom quark is implied to be about 5 GeV/c². The reaction being studied was

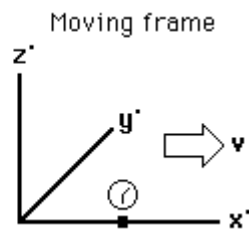
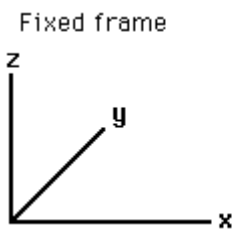
$$p + N \rightarrow \mu^+ + \mu^- + X$$

where N was a copper or platinum nucleus. The spectrometer had a muon-pair mass resolution of about 2%, which allowed them to measure an excess of events at 9.4 GeV/c². This resonance has been subsequently studied at other accelerators with a detailed investigation of the bound states of the bottom-antibottom meson.

[Table of quark properties](#)



Time Dilation



A clock in a moving frame will be seen to be running slow, or "dilated" according to the [Lorentz transformation](#). The time will always be shortest as measured in its rest frame. The time measured in the frame in which the clock is at rest is called the "proper time".

If the time interval $T_0 = t_2' - t_1'$ is measured in the moving reference frame, then $T = t_2 - t_1$ can be calculated using the Lorentz transformation.

$$T = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{vx_2'}{c^2} - t_1' + \frac{vx_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

The time measurements made in the moving frame are made at the same location, so the expression reduces to:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_0 \gamma$$

For $v = \boxed{} c$, $T = \boxed{} T_0$

For small velocities at which the relativity factor is very close to 1, then the time dilation can be expanded in a [binomial expansion](#) to get the approximate expression:

$$T \approx T_0 \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} \right]$$

Gravitational Time Dilation

A clock in a gravitational field runs more slowly according to the gravitational time dilation relationship from [general relativity](#)

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}$$

This is distinct from the [time dilation](#) from relative motion

where T is the time interval measured by a clock far away from the mass. For a clock on the surface of the Earth, this expression becomes

**Gravitational time dilation
on the surface of Earth.**

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2gR}{c^2}}}$$

This time dilation is about 1 part in 10^9 . [.....Show](#)

Conceptual Framework: Relativity

Idea	Experiment
The measurement of absolute velocity is not possible	Michelson-Morley Experiment
The velocity of light is independent of source or detector velocity - a universal constant.	Sharp double-star images Aberration of star positions
The Lorentz transformation $\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad t' = \frac{t - \frac{\mathbf{v}\mathbf{x}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	
The Galilean transformation and the concept of universal time must be abandoned	
Length Contraction $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	Muon decay in atmosphere
Time Dilation $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	Muon decay in atmosphere Relativistic Doppler effect. Fine structure in atomic spectra
Conservation of momentum leads to relativistic mass: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$	Cyclotron frequency Accelerators
Velocity of light, "c", as speed limit of the universe	Cerenkov radiation.

[Index](#)

[Relativity concepts](#)

Energy-mass relationship

$$E = mc^2$$

Binding energy of nuclei

Nuclear fission and fusion

Kinematic Time Shift Calculation

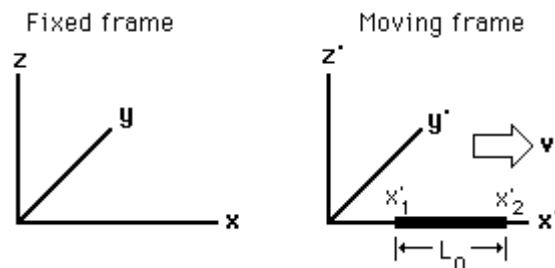
If the kinematic [time dilation](#) expression

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

where T_0 is the "proper time",
the time measured in the rest
frame of the event.

is expanded in a [binomial expansion](#), then for small velocities it becomes

$$T \approx T_0 \left[1 + \frac{v^2}{2c^2} \right]$$



This expression can be used to compute the time dilation in the Hafele-Keating experiment in which an atomic clock was taken aboard an aircraft and compared to a ground-based clock. The problem encountered with measuring the difference between a surface clock and one on an aircraft is that neither location is really an inertial frame. If we take the center of the earth as an approximation to an inertial frame, then we can compute the difference between a surface clock and the aircraft clock. Taking a "proper time" at the earth's center as if the master clock were there, the time measured by a clock on the surface would be larger

$$T_S = T_0 \left[1 + \frac{R^2 \omega^2}{2c^2} \right] \quad \begin{array}{l} \text{where } R = \text{Earth radius} \\ \omega = \text{angular velocity} \\ \text{of Earth rotation} \end{array}$$

and that for the airborne clock would be approximately

$$T_A = T_0 \left[1 + \frac{(R\omega + v)^2}{2c^2} \right]$$

since to the level of the approximations used, the height of the aircraft does not significantly change the radius R. The difference in the times compared to our hypothetical master clock would then be

$$T_A - T_S = T_0 \left[\frac{2R\omega v + v^2}{2c^2} \right]$$

Now this relationship is just the reverse of the actual experiment, since we have assumed that the clock is at the center of the earth, whereas the actual clocks are in the frames which are moving with respect to the center. The time difference expression should be valid, but in comparing the aircraft clock to the surface clock, we should find that it has fallen behind, so we can model that time difference by

$$\begin{array}{l} \text{Change of airborne} \\ \text{clock compared to} \\ \text{surface clock} \end{array} \quad T_A - T_S = -T_S \left[\frac{2R\omega v + v^2}{2c^2} \right] \quad \text{Application}$$

Gravity and the Photon

The [relativistic energy expression](#) attributes a mass to any energetic particle, and for the [photon](#)

$$E = mc^2 = h\nu$$

The [gravitational potential energy](#) is then

$$U = \frac{-GMm}{r} = \frac{-GMh\nu_0}{rc^2}$$

When the photon escapes the gravity field, it will have a different frequency

$$h\nu = h\nu_0 \left[1 - \frac{GM}{rc^2} \right] \quad \nu = \nu_0 \left[1 - \frac{GM}{rc^2} \right] \quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{GM}{rc^2}$$

Since it is reduced in frequency, this is called the [gravitational red shift](#) or the Einstein red shift.

[Escape energy for a photon](#)

Binomial Expansion

For any power of n, the binomial (a + x) can be expanded

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} x^2 + \dots$$

This is particularly useful when x is very much less than a so that the first few terms provide a good approximation of the value of the expression. There will always be $n+1$ terms and the general form is:

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} x^k$$

Note that the factorial is given by
 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot n$
 and $0! = 1$

of the n th power of a binomial is given by:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

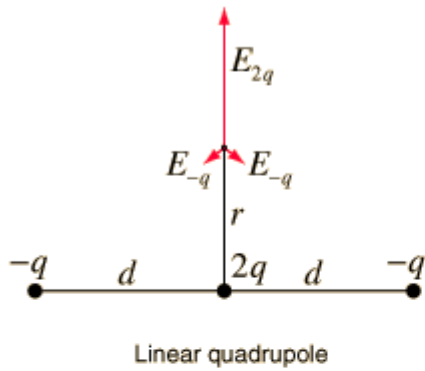
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$



$$E_{2q} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_{-q} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)}$$

By symmetry, the field components parallel to the quadrupole cancel. The resultant field perpendicular is

$$E_r = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \right]$$

Factoring out the $\frac{1}{r^2}$ term puts it in the form

$$E_r = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - \left(1 + \frac{d^2}{r^2} \right)^{-3/2} \right]$$

For $\frac{d^2}{r^2} \ll 1$, the binomial expansion gives

$$\left(1 + \frac{d^2}{r^2} \right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{d^2}{r^2}$$

and the quadrupole electric field at large distances simplifies to

$$E_r \approx \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

Binomial Expansion Examples

The [binomial expansion](#) is a useful example of a series. Some common examples of its application are:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

$$(x \pm y)^4 = x^4 \pm 4x^3y + 6x^2y^2 \pm 4xy^3 + y^4$$

Mesons

Particle	Symbol	Anti-particle	Makeup	Rest mass MeV/c ²	S	C	B	Lifetime	Decay Modes
Pion	π^+	π^-	$u\bar{d}$	139.6	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+ \nu_\mu$
Pion	π^0	Self	$\frac{\bar{u}u + \bar{d}d}{\sqrt{2}}$	135.0	0	0	0	0.83×10^{-16}	2γ
Kaon	K^+	K^-	$u\bar{s}$	493.7	+1	0	0	1.24×10^{-8}	$\mu^+ \nu_\mu, \pi^+ \pi^0$
Kaon	K_S^0	K_S^0	1^*	497.7	+1	0	0	0.89×10^{-10}	$\pi^+ \pi^-, 2\pi^0$
Kaon	K_L^0	K_L^0	1^*	497.7	+1	0	0	5.2×10^{-8}	$\pi^+ e^- \bar{\nu}_e$
Eta	η^0	Self	2^*	548.8	0	0	0	$< 10^{-18}$	$2\gamma, 3\mu$

Rho	ρ^+	ρ^-	$u\bar{d}$	770	0	0	0	0.4×10^{-23}	π, π
Phi	ϕ	Self	$s\bar{s}$	1020	0	0	0	20×10^{-23}	$K^+K^-, K^0\bar{K}^0$
D	D^+	D^-	$c\bar{d}$	1869.4	0	+1	0	10.6×10^{-13}	$K+_, e+_-$
D	D^0	\bar{D}^0	$c\bar{u}$	1864.6	0	+1	0	4.2×10^{-13}	$[K, \mu, e]+_-$
D	D_S^+	D_S^-	$c\bar{s}$	1969	+1	+1	0	4.7×10^{-13}	$K+_-$
J/Psi	J/ψ	Self	$c\bar{c}$	3096.9	0	0	0	0.8×10^{-20}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \dots$
B	B^-	B^+	$b\bar{u}$	5279	0	0	-1	1.5×10^{-12}	D^0+_-
B	B^0	\bar{B}^0	$d\bar{b}$	5279	0	0	-1	1.5×10^{-12}	D^0+_-
Upsilon	Y	Self	$b\bar{b}$	9460.4	0	0	0	1.3×10^{-20}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \dots$

1* The neutral [Kaons](#) K_S^0 and K_L^0 represent symmetric and antisymmetric mixtures of the quark combinations down-antistrange and antidown-strange.

2* The neutral eta meson is considered to be a quark combination $(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$

Kaons

Particle	Symbol	Anti-particle	Makeup	Rest mass MeV/c ²	S	C	B	Lifetime	Decay Modes
Kaon	K^+	K^-	$u\bar{s}$	493.7	+1	0	0	1.24×10^{-8}	$\mu^+ \nu_\mu, \pi^+ \pi^0$
Kaon	K_S^0	K_S^0	1*	497.7	+1	0	0	0.89×10^{-10}	$\pi^+ \pi^-, 2\pi^0$
Kaon	K_L^0	K_L^0	1*	497.7	+1	0	0	5.2×10^{-8}	$\pi^+ e^- \bar{\nu}_e$

1* The neutral [Kaons](#) K_S^0 and K_L^0 represent symmetric and antisymmetric mixtures of the quark combinations down-antistrange and antidown-strange.

* The neutral [Kaons](#) K_S^0 and K_L^0 represent symmetric and antisymmetric mixtures of the quark combinations down-antistrange and antidown-strange.

The charged kaons are [mesons](#) which have a [quark](#) composition of up-antistrange for the positive kaon and antiup-strange for the negative kaon. They decay in about 10^{-8} seconds by the processes:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$$

and

$$K^- \rightarrow \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

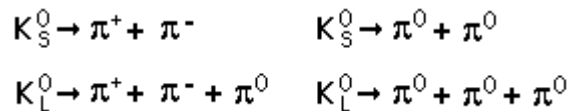
Decay times in this range indicate decay by the weak interaction. None of the decay products has a strange quark, so this decay violates [conservation of strangeness](#) and cannot proceed by the strong interaction.

Describing the neutral kaons is much more complex. There are two versions of this particle with the same mass but different decay lifetimes!

One is called K-zero-short $K_S^0 = \frac{\Psi(d\bar{s}) + \Psi(\bar{d}s)}{\sqrt{2}}$ Lifetime 9×10^{-11} s

The other is called K-zero-long. $K_L^0 = \frac{\Psi(d\bar{s}) - \Psi(\bar{d}s)}{\sqrt{2}}$ Lifetime 5×10^{-8} s

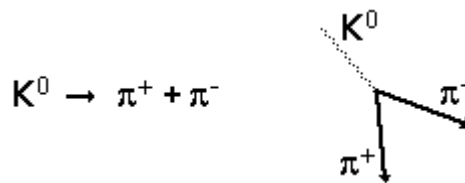
These two particles are considered to be combinations of down-antistrange and antidown-strange quarks. These particles decay into pions by



The quark mixing which leads to these combinations involves the exchange of two [W bosons](#).

The neutral kaons are important historically for their part in advancing our understanding of quark processes. When first discovered in the late 1940s they were labeled the τ and θ mesons, and their decay was a great mystery, labeled the τ - θ puzzle. The particles were identical in mass, and the only thing which apparently differentiated them was their decay processes and the fact that the two different sets of decay products had different parity. Particle decays by the strong or electromagnetic interactions had been observed to conserve parity in their decays. Theoretical physicists T. D. Lee and C. N. Yang proposed in 1956 that parity need not be conserved in weak interaction decays. In 1957 Chien-Shiung Wu showed this [violation of parity conservation](#) in the beta decay of cobalt. Even with the violation of parity, it was thought that the combination of charge conjugation and parity would leave the system invariant ([CP invariance](#)). An experiment by [Cronin and Fitch](#) in 1964 showed that there was a small [CP violation](#) in the kaon decay, so the kaon has played a central role in the discussions of these symmetries since that time.

When Rochester and Butler discovered the short-lived version of the neutral kaon in 1946, they did so by observing a characteristic "V" pattern in a cloud chamber. The decay they saw was



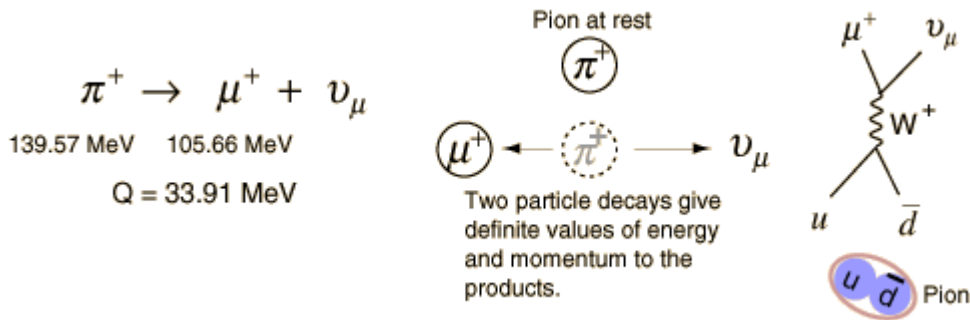
The neutral kaon did not leave a track in the cloud chamber, so the "V" track of pions revealed its presence upon decay.

The Upsilon Particle

Particle	Symbol	Anti-particle	Makeup	Rest mass MeV/c ²	S	C	B	Lifetime	Decay Modes
Upsilon	Υ	Self	$b\bar{b}$	9460.4	0	0	0	1.3×10^{-20}	$e^+e^-, \mu^+\mu^-, \dots$

Energetics of Charged Pion Decay

Since the charged [pions](#) decay into two particles, a [muon](#) and a [muon neutrino](#) or antineutrino, then conservation of momentum and energy give the decay products definite energies. This contrasts with the three-particle decay of the neutral pion in which the emitted particles have a range of energies and momenta.



For the neutrino product which has negligible mass, the relativistic energy expression is just

$$E_\nu = pc$$

The muon must have the same value of pc in the opposite direction. For the muon, we can write the momentum relationship

$$(pc)^2 = KE_\mu + 2KE_\mu m_\mu c^2 \quad \text{where} \quad KE_\mu = Q - pc$$

Expanding in terms of Q and pc , we obtain

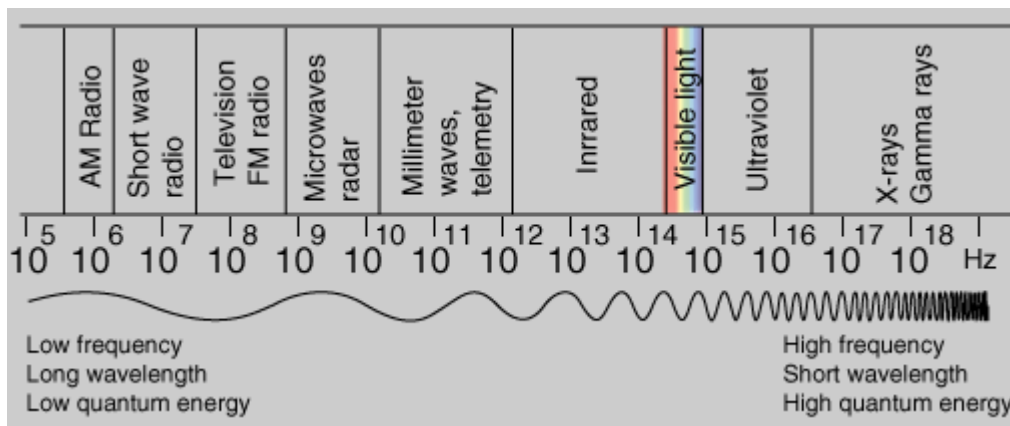
$$\begin{aligned} (pc)^2 &= Q^2 - 2pcQ + (pc)^2 + 2(Q - pc)m_\mu c^2 \\ pc &= \frac{Q^2 + 2Qm_\mu c^2}{2(Q + m_\mu c^2)} = \frac{(33.91)^2 + 2(33.91)(105.66)}{2(33.91 + 105.66)} = 29.79 \text{ MeV} \\ KE_\mu &= 33.91 - 29.79 = 4.12 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Seeing such definite energies identifies a decay as a two particle decay. The measurement of the kinetic energy of the muon at 4.12 MeV shows that most of the energy is carried by the neutrino, yet is consistent with zero mass for the neutrino since that value for the muon kinetic energy was calculated with the assumption of zero mass for the neutrino.

[Meson diagram](#) [Table of mesons](#)

The Electromagnetic Spectrum

Click on any part of the spectrum for further detail.



$$c = v\lambda$$
 Also commonly written $v = f\lambda$

velocity = frequency x wavelength

[Speed of light](#)

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

It is typical in high energy physics, where relativistic quantities are encountered, to make use of the [Einstein relationship](#) to relate mass and momentum to energy. In relativistic mechanics, the quantity pc is often used in momentum discussions. It has the units of energy.

$$pc = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$$

$$p^2 c^2 = E^2 - m_0^2 c^4$$

$$p^2 v^2 c^2 = p^2 c^4 - m_0^2 c^4 v^2$$

$$m^2 v^4 c^2 = m^2 v^2 c^4 - m_0^2 v^2 c^4$$

$$m^2 v^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$$

$$\frac{m^2 v^2}{m^2 c^2} = \frac{m^2 c^2 - m_0^2 c^2}{m^2 c^2}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2}{m^2}$$

$$\frac{c^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \frac{m_0^2}{m^2}}$$

$$\frac{c}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2}{m^2}}}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

For extreme relativistic velocities where $E \gg m_0 c^2$ then $pc \approx E$

A useful application of the quantity pc is in the calculation of the velocity as a fraction of c .

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} \quad \text{and as } v \Rightarrow c, \quad pc \Rightarrow E$$

$$E^2 = p^2 c^4 / v^2$$

with the limiting case applying for the momentum of a photon.